Devoir maison n° 2

À rendre le jeudi 19 septembre

Avant toute chose, relire la fiche de consignes et conseils de rédaction.

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. *D'après ESCP opt. techno. 2022*
On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

On **admet** * que cela définit deux suites de nombres réels **strictement positifs**.

Partie A - Variations

1. Calculer a_1 et vérifier que $b_1 = \sqrt{3}$.
2. Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n). \qquad (\diamond)$$
3. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $a_n < b_n$.
4. Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
5. Montrer que $b_n = \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Partie B - Limite

6. En utilisant $(\diamond)$, justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité : $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.
7. En déduire l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n$.
8. En utilisant les résultats de la partie A et la question précédente, montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite. On note ℓ cette limite commune.
9. On donne $\pi \approx 3{,}14$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.
La limite commune ℓ est l'un des quatre réels suivants :
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$ b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ c) $\dfrac{3}{\pi}$ d) 3
Compte tenu de certains résultats obtenus dans cet exercice, déterminer ℓ en justifiant votre réponse.

Exercice 2. **[Facultatif]** *Limite d'un produit*

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

*. Cela se montre via une récurrence sans difficulté.